II Encuentro Matemático del Caribe
Universidad Tecnológica de Bolívar & Universidad del Sinú Seccional Cartagena
Septiembre 09 - 12, 2020, Cartagena de Indias - Colombia

Números de Stirling y el operador $z^\alpha \frac{d}{dz}$

Tipo: ponencia

Michael Alexánder Rincón Villamizar*

Resumen

Si f es una función holomorfa y $\alpha \in \mathbb{C}$, se demuestra que para cada $n \in \mathbb{N}$, la n-ésima iteración del operador $z^\alpha \frac{d}{dz}$ viene dada por

$$\left(z^\alpha \frac{d}{dz}\right)^n (f(z)) = z^{n(\alpha-1)} \sum_{k=0}^{n} \frac{s(n,k;\alpha)}{k!} z^k \frac{d^k}{dz^k} f(z),$$

donde $s(n,k;\alpha)$ es una sucesión de coeficientes que depende de los parámetros n, k y α. Mostraremos que los coeficientes $s(n,k;\alpha)$ pueden calcularse explícitamente a través de los números de Stirling de primera y segunda clase.

Palabras & frases claves: Números de Stirling de primera clase, Números de Stirling de segunda clase, operador $z^\alpha \frac{d}{dz}$.

1. Introducción

Los números de Stirling de segundo orden aparecen en el estudio de las iteraciones del operador $z\frac{d}{dz}$ conocido como Derivada de Mellin. Es conocido que si f es una función holomorfa, entonces

$$\left(z\frac{d}{dz}\right)^n (f(z)) = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} z^k f^{(k)}(z), \tag{1}$$

*Universidad Industrial de Santander, e-mail: marinvil@uis.edu.co

donde $\left\{ {n \atop k} \right\}$ denota el número de Stirling de segunda clase (véase [1]). El resultado anterior motiva el objetivo de esta charla: estudiar las iteraciones del operador $z^\alpha \dfrac{d}{dz}$, donde $\alpha \in \mathbb{C}$. Probaremos que si f es una función holomorfa y $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\left(z^\alpha \frac{d}{dz}\right)^n (f(z)) = z^{n(\alpha-1)} \sum_{k=0}^{n} \frac{s(n,k;\alpha)}{k!} z^k \frac{d^k}{dz^k} f(z),$$

donde

$$\frac{s(n,k;\alpha)}{k!} = \sum_{m=k}^{n} \left[{n \atop m} \right] \left\{ {m \atop k} \right\} (\alpha-1)^{n-m}. \tag{2}$$

Aquí $\left[{n \atop m} \right]$ es el número de Stirling de primera clase. Note que cuando $\alpha = 1$, la fórmula (2) implica (1).

Referencias

[1] Boyadzhiev, Khristo N. *A series transformation formula and related polynomials.* Int. J. Math. Math. Sci. 2005, 23, 3849-3866.