II Encuentro Matemático del Caribe

Universidad Tecnológica de Bolívar & Universidad del Sinú Seccional Cartagena

Septiembre 09 - 12, 2020, Cartagena de Indias - Colombia

Estimativas de error para discretizaciones del Laplaciano por métodos de volúmenes finitos en mallas esféricas geodésicas icosaédricas

Tipo: ponencia

Leonardo A. Poveda*, Pedro Peixoto, Saulo R. M. de Barros.

Resumen

En este trabajo estudiamos estimativas *a priori* de las soluciones numéricas de una discretización del Laplaciano por métodos de volúmenes finitos en la esfera unitaria. Inicialmente y conforme a la literatura, consideramos las mallas esféricas icosaédricas y sus propiedades geométricas. Por otro lado, definimos un esquema de Volúmenes Finitos usuales para el Laplaciano en la esfera unitária. Analizamos el comportamiento de inconsistencia del operador discreto, relacionado con ciertas características geométricas de la malla. Mostramos que el esquema de Volúmenes Finitos conservativo satisface una condición de consistencia débil y obtenemos estimativas de orden lineal en las normas discretas usuales. Por último, nos enfocamos en las estimativas de convergencia de las soluciones de Volúmenes Finitos usando el análisis convergencia de los Elementos Finitos Lineales. En particular, mostramos estimativas clásicas *a priori* de orden lineal en las normas H^1 y L^2. Además, establecemos estimativas casi-óptimas para las normas $W^{1,\infty}$ y L^∞ de orden sublineal en relación al tamaño de malla. Por último, algunos experimentos numéricos validan adecuadamente las estimativas.

*Universidade de São Paulo, e-mail: lpovedac@ime.usp.br

Palabras & frases claves: Laplaciano, malla esférica icosaédrica, volúmenes finitos, consistencia débil, estimativas de error *a priori*, estimativas puntuales.

1. Introducción

En los últimos años el análisis de convergencia de soluciones de las ecuaciones diferenciales parciales en la esfera ha sido de gran interés en la comunidad científica [2, 3, 1]. En particular, la relevancia se concentra en un amplio número de aplicaciones como: la dinï¿½mica de fluidos geofï¿½sicos y la previsión numï¿½rica del tiempo. Usualmente, una forma de entender estos fenómenos es a través de modelos matemáticos que caracterizan sus propriedades fundamentales. En este trabajo consideramos la ecuación de Laplace

$$\Delta_s u(\mathrm{x}) = f(\mathrm{x}), \quad \text{para cada } \mathrm{x} \in \mathbb{S}^2.$$

Para un mejor entendimiento de dichas propiedades es necesário utilizar la información cualitativa de las soluciones, lo cual es posible a travï¿½s de aproximaciones o discretizaciones del modelo continuo, es decir, un modelo numérico. Dada la naturaleza del problema, es necesário establecer una arquitectura en la geometría esférica. Así, existen varias maneras de discretizar la esfera, en particular, nos enfocamos en las mallas geodésicas esféricas icosaédricas y sus propiedades en la discretización del Laplaciano [6, 7]. Un primer objetivo es estudiar caracterï¿½sticas del problema discreto definido en dicha malla. Estudiamos la inconsistencia del esquema de Volúmenes Finitos usual [4, 5] en el contexto de la geometría esférica y determinamos estimativas débiles en las normas naturales.

Posteriormente, consideramos una modificación adecuada del esquema discreto en términos de una forma variacional e incorporamos una relación con los Mï¿½todos de Elementos Finitos, asumiendo que la solución de Volúmenes Finitos como una perturbación dela solución de Elementos Finitos [8]. Como consecuencia, establecemos estimativas de estabilidad en las soluciones discretas y enseguida determinamos estimativas de error *a priori* en las normas H^1, L^2 y del máx. Los ordenes de convergencia son encaminados de forma tradicional, definidos principalmente por la diferencia entre las formas variacionales de los MVF y los MEFL y usando las propiedades geométricas de las mallas geodésicas icosaédricas junto con algunas optimizaciones usuales de la literatura.

Referencias

[1] Demlow, A. (2009). Higher-order finite element methods and pointwise error estimates for elliptic problems on surfaces. SIAM Journal on Numerical Analysis, 47(2), 805-827.

[2] Du, Q., Gunzburger, M. D., & Ju, L. (2003). Voronoi-based finite volume methods, optimal Voronoi meshes, and PDEs on the sphere. Computer methods in applied mechanics and engineering, 192(35-36), 3933-3957.

[3] Du, Q., & Ju, L. (2005). Finite volume methods on spheres and spherical centroidal Voronoi meshes. SIAM Journal on Numerical Analysis, 43(4), 1673-1692.

[4] Faille, I. (1992). A control volume method to solve an elliptic equation on a two-dimensional irregular mesh. Computer methods in applied mechanics and engineering, 100(2), 275-290.

[5] Herbin, R. (1995). An error estimate for a finite volume scheme for a diffusion–convection problem on a triangular mesh. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 11(2), 165-173.

[6] Miura, H., & Kimoto, M. (2005). A comparison of grid quality of optimized spherical hexagonal–pentagonal geodesic grids. Monthly weather review, 133(10), 2817-2833.

[7] Ringler, T. (2003). Comparing truncation error to PDE solution error on spherical Voronoi Tessellations. Tech report, Dept. Atmospheric Sci., Colorado State Univ.

[8] Zhang, T. (2014). Superconvergence of finite volume element method for elliptic problems. Advances in Computational Mathematics, 40(2), 399-413.