Variedades Riemannianas con Flujo Geodésico Anosov no Tienen Puntos Conjugados

Autor: Sergio Augusto Romaña Ibarra
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
E-mail: **sergiori@im.ufrj.br**

Resumen: Demostramos que cualquier variedad Riemanniana completa no compacta con curvatura limitada por debajo y flujo geodésico de tipo Anosov no tiene puntos conjugados. En particular, respondemos a un problema abierto mencionado en [5] que está relacionado con los enunciados de Mané en [7] sobre una generalización del teorema de Klingenberg a variedades no compactas. Este es un trabajo en conjunto con Ítalo Melo.

Palabras clave: Puntos conjugados, flujo geodésico, flujos Anosov, curvatura.

Introducción

En [8], Anosov demostró que los flujos geodésicos de variedades compactas de curvatura negativa inducen sistemas dinámicos caóticos. Estos flujos geodésicos se denominan *sistemas uniformemente hiperbólicos* o simplemente *sistemas Anosov*. Cuando la variedad no es compacta, pero su curvatura está "pinched"negativamente (limitada entre dos constantes negativas), el mismo argumento de Anosov mostró que el flujo geodésico también es Anosov (cf. [5]). En [6], Klingenberg mostró que las variedades compactas con flujo geodésico Anosov comparten varias propiedades con variedades cuya curvatura es negativa. Entre ellos, no tienen puntos conjugados, el flujo geodésico es ergódico, las órbitas periódicas son densas, el grupo fundamental tiene un crecimiento exponencial y cada geodésica cerrada tiene índice 0. Para variedades no compactas algunos de estos resultados no son válidos. Sin embargo, cuando el volumen es finito, en el artículo destacado [7], Mañé demostró, utilizando un índice de Maslov, que si el flujo geodésico admite un subfibrado lagrangiano invariante continuo, entonces no hay puntos conjugados. En particular, dado que los paquetes estables e inestables son continuos, los flujos de Anosov geodésicos invariantes y lagrangianos en variedades de volumen finito no también tienen puntos conjugados. En el mismo artículo, Mañé afirmó que las variedades no compactas, completas, con curvatura limitada por debajo, no tienen puntos conjugados, siempre que el flujo geodésico sea Anosov. Sin embargo, como se menciona en [[5], págs. 475-476], la prueba de Mañé contiene un error en el Proposición II.2 (ver también [4]). Desde entonces, se planteó la siguiente conjetura:

Conjetura 1. *Si M es una variedad Riemanniana completa no compacta con curvatura limitada por debajo y cuyo flujo geodésico es Anosov, entonces M no tiene puntos conjugados.*

Este problema se ha estudiado recientemente. El trabajo más reciente para solucionar este problema se debe a G. Knieper (cf. [4]), quien resolvió el problema asumiendo tres condiciones geométricas adicionales, que son, sin recurrencia fuerte, la existencia de un conjunto compacto donde todos los puntos conjugados posibles sólo aparecen en este conjunto compacto y la existencia de una geodésica sin puntos conjugados. El objetivo principal de este trabajo es probar esta conjetura sin asumir ninguna condiciones geométricas en la variedad. Más específicamente, probamos el siguiente teorema:

Teorema 2. *Sea M una variedad Riemanniana completa no compacta con curvatura limitada por debajo. Si el flujo geodésico de M es Anosov, entonces M no tiene puntos conjugados.*

De esta manera, la afirmación original de Mañé en [7] es cierta.

Referencias

[1] Melo, Í., & Romaña, S. (2020). Riemannian manifolds with Anosov geodesic flow do not have conjugate points. *arXiv preprint arXiv:2008.12898*.

[2] Melo, Í., & Romaña, S. (2020). Contributions to the study of Anosov geodesic flows in non-compact manifolds. *Discrete & Continuous Dynamical Systems-A, 40*(9), 5149.

[3] Dowell, Í., & Romaña, S. (2017). A rigidity theorem for Anosov geodesic flows. *arXiv preprint arXiv:1709.09524*.

[4] Knieper, G. (2018). A note on Anosov flows of non-compact Riemannian manifolds. *Proceedings of the American Mathematical Society, 146*(9), 3955-3959.

[5] G. Knieper. Chapter 6, hyperbolic dynamics and riemannian geometry. volume 1 of Handbook of Dynamical Systems, pages 453–545. Elsevier Science, 2002.

[6] Klingenberg, W. (1974). Riemannian manifolds with geodesic flow of Anosov type. *Annals of Mathematics*, 1-13.

[7] Mañé, R. (1987). On a theorem of Klingenberg. *Dynamical systems and bifurcation theory (Rio de Janeiro, 1985)*, 319-345.

[8] Anosov, D. V. (1969). Geodesic flow on compact manifolds of negative curvature. In *Proc. Steklov Math. Inst. AMS Translations* (Vol. 1969).