II Encuentro Matemático del Caribe

Universidad Tecnológica de Bolívar & Universidad del Sinú Seccional Cartagena

Septiembre 09 - 12, 2020, Cartagena de Indias - Colombia

Representación matricial adaptativa del método de Uzawa

Tipo: Ponencia

Catalina M. Rúa A.*   Alexandre M. Roma**

Resumen

Una gran variedad de aplicaciones de la industria, la ingeniería y la medicina, entre otras ciencias, dependen de la simulación computacional de fluidos incompresibles multifásicos. Así los modelos matemáticos, tales como las Ecuaciones de Navier Stokes, usados para obtener simulaciones coherentes con los procesos de la naturaleza o las propiedades físicas de un fluido, deben producir resultados muy precisos, por lo cual es necesario que la metodología numérica usada en estos modelos tengan buena precisión, estabilidad y que sus bases teóricas se encuentren bien fundamentadas. Además, aplicaciones con fluidos son muy sensibles a propiedades físicas propias de cada tipo de fluido, tales como la densidad, viscosidad, presión o su número de Reynolds, esto exige simulaciones eficientes para evitar tanto un alto tiempo computacional en la búsqueda de aproximaciones numéricas como el uso excesivo de memoria.

En esta charla específicamente estamos interesados en el estudio de fluidos incompresibles de bajo Reynolds, dado que la dinámica del sistema puede ser modelada por la Ecuación estacionaria de Stokes. Una versión adaptativa del Método de Uzawa usando para su solución el Método del Gradiente Biconjugado estabilizado y además algunas discretizaciones de diferencia finitas en forma matricial esparza, son usadas para solucionar dicha ecuación en el caso bidimensional en mallas estructuradas por bloques con refinamiento adaptativo y condiciones de frontera de tipo Dirichlet.

Palabras & frases claves: Número de Reynolds, Ecuación de Stokes, Método de proyección, Método de Uzawa, Precondicionadores.

*Universidad de Nariño, e-mail: `catalina.rua@udenar.edu.co`

**Universidade de São Paulo, e-mail: `roma@ime.usp.br`

1. Introducción

La dinámica de fluidos computacional es un área que tiene varias aplicaciones tanto de interés práctico como teórico. Así mismo, en muchas de estas aplicaciones es necesario trabajar con ecuaciones matemáticas que modelen y describan cada aplicación. En esta área para muchos de los modelos matemáticos usados aún no hay en la literatura una solución teórica de las ecuaciones que modelan los diferentes fenómenos, las cuales usualmente están relacionadas con ecuaciones diferenciales parciales, por tal motivo se desea encontrar la solución numérica y la simulación computacional de tales ecuaciones, ver [6] y [7] .

Diferencias finitas, volúmenes finitos y elementos finitos son algunos de los métodos numéricos que se usan para resolver EDPs como las que resultan de problemas con aplicaciones en dinámica de fluidos. El método de diferencias finitas es sencillo de implementar teniendo en cuenta una discretización del dominio geométrico en mallas cartesianas o rectangulares, pero tiene la desventaja de que según el caso presenta una estabilidad sensible que exige una elevada demanda computacional por refinamientos restrictivos del dominio. De donde para lograr capturar numéricamente detalles y fenómenos locales de forma precisa, es claro que una discretización numérica usando mallas uniformes sería ineficiente y con un alto costo computacional, por lo que el uso de mallas con refinamiento adaptativo localizado (AMR - *Adaptive Mesh Refinement*) es una eficiente y óptima solución con resultados muy precisos para simulaciones numéricas con el método de diferencias finitas.

Este trabajo ha sido motivado por el estudio de fluidos incompresibles de bajo número de Reynolds. Cuando el número de Reynolds tiende a cero, la dinámica del sistema puede ser modelada por la Ecuación de Stokes estacionaria. Una versión adaptativa del Método de Uzawa usando para su solución el Método del Gradiente Biconjugado estabilizado y además, algunas discretizaciones en forma matricial esparza son usadas para solucionar dicha ecuación en el caso bidimensional en mallas adaptativas estructuradas en bloques con condiciones de frontera de tipo Dirichlet, como en [3] y [6].

Mallas con refinamiento adaptativo localizado por bloques permiten el uso de esquemas de diferencia finitas y aumentan localmente la resolución de los métodos, mejorando así su exactitud a un bajo costo computacional, la metodología que es usualmente empleada es la propuesta por Berger y Colella en [2]. Por otro lado, el uso de representaciones matriciales posibilita el empleo de precondicionadores y el estudio propiedades numéricas como las que controlan la sensibilidad a perturbaciones en las aproximaciones de sistemas lineales, ver [1] y [5].

Aunque por mucho tiempo con esta técnica estructurada de AMR se emplearon métodos sin el uso de matrices (*free matrix*), actualmente las matrices relacionadas con la discretización en AMR son implementadas debido a que permiten el uso de diferentes métodos de solución de sistemas lineales y precondicionadores para mejorar el número de condicionamiento y con ello las propiedades teóricas para la eficiencia de los métodos, ver [1] y [8]. El uso de matrices se ve potenciado con la aplicación de software libre en el área de álgebra lineal numérica como el PETSc (*Portable Extensible Toolkit for Scientific Computation*, *www.mcs.anl.gov/petsc*), el cual es un conjunto de estructuras de datos y rutinas en serie y paralelas para la solución de modelos científicos a gran escala, en especial para solución de sistemas lineales.

Usando mallas escalonadas también conocidas como "*Staggered Mesh*", donde las variables vectoriales son definidas en las faces y las escalares en los centros de cada celda, se soluciona numéricamente la ecuación de Stokes por medio de un esquema de diferencias finitas para la discretización de la variable vectorial que define la velocidad del fluido, en conjunto con el Método de Uzawa que controla el acople entre las variables que relacionan la presión y la velocidad, ver [4] y [6]. Para solucionar el conjunto resultante de ecuaciones algebraicas, una representación matricial de la discretización en la malla adaptativa es construida y el sistema lineal resultante se soluciona usando la biblioteca de álgebra lineal numérica PETSc.

Estamos interesados en presentar los resultados numéricos obtenidos cuando se impone un problema específico en el que se conoce su solución exacta, además del estudio realizado con diferentes métodos para resolver sistemas lineales usando como precondicionador la factorización LU incompleta.

Referencias

[1] Adams, M. F.; Cornford, S. L.; Martin, D.; McCorquodale, P.; (2019). *Composite matrix construction for structured grid adaptive mesh refinement.* Journal of Computer Physics Communications, 244, 35-39.

[2] Berger, M. J.; Colella, P, (1989). *Local Adaptive Mesh Refinement for shock hydrodynamics.* Journal of Computational physics 82, 64-84.

[3] Kim, S. D., (2009). *Uzawa algorithms for coupled Stokes equations from the optimal control problem.* CALCOLO 46, 37-47 .

[4] Klein, H. D.; Leal, L. G.; Garcia-Cervera, C. J.; Ceniceros H. D., (2005). *Computational studies of the shear flow behaviour of a model for nematic liquid crystalline polymers.* ANZIAM J. 46, C210-C244.

[5] Pletzer, A.; Jamroz B.; Crockettv R.; Sides, S., (2014). *Compact cell centered discretization stencils at fine-coarse block structured grid interfaces.* Journal of Computational physics 260, 25-36.

[6] Rua, C., (2013). *Simulação computacional adaptativa de escoamentos bifásicos viscoelásticos.* Universidad de San Paulo, Brasil, tesis doctorado.

[7] Shonibare, O., (2017). *Numerical Simulation of Viscoelastic Multiphase Flows Using an Improved Two-phase Flow Solver.* Michigan Technological University, USA, dissertation.

[8] Sousa, F. S.; Lages, C. F.; Ansoni, J. L.; Castelo, A.; Simao, A., (2019). *A finite difference method with meshless interpolation for incompressible flows*

in non-graded tree-based grids. Journal of Computational physics 396, 848-866.